1 以下の問に答えよ。

(1) 次の値を求めよ。

① $\log_{100}1$　② $\log_5\sqrt{2}+\frac{1}{2}\log_5\frac{25}{12}-\frac{3}{2}\log_5\frac{1}{\sqrt[3]{6}}$　③ $\log_4 5\cdot\log_5 8$

④ $\log_2 10\cdot\log_5 10-(\log_2 5+\log_5 2)$　⑤$\log_{16}(\sqrt{5+\sqrt{24}}-\sqrt{5-\sqrt{24}})$

⑥ $a^{-\log_a x}$

(2) ① $\log_{\frac{1}{2}}3$, $\log_{\frac{1}{4}}5$, -2　② $\log_4 9$, $\log_9 25$, 1.5の大小を不等号を用いて表せ。

(3) $a=\log_2 3$, $b=\log_2 5$ とするとき, ① $\log_4 45$　② $\log_{20}80$ を a, b で表せ。

(4) $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ とする。

① 6^{52}は何桁の整数か。

② $\frac{1}{(\sqrt{2})^{25}}$を小数で表したとき, 小数第何位に初めて0でない数字が現れるか。

③ 不等式 $\left(\frac{1}{3}\right)^n<0.0001$ を満たす最小の整数 n を求めよ。

④ 2.25^n の整数部分が3桁であるような整数 n の値を求めよ。

(1)	①		②		③	
	④		⑤		⑥	
(2)	①					
	②					
(3)	①		②			
(4)	①		②			
	③		④			

解答 (1) ① 0　② 1　③ $\frac{3}{2}$　④ 2　⑤ $\frac{3}{8}$　⑥ $\frac{1}{x}$

(2) ①$-2<\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{4}}5$　②$\log_9 25<1.5<\log_4 9$　(3) ① $a+\frac{b}{2}$

② $\frac{4+ab}{2+ab}$　(4) ① 41桁　② 第4位　③ 9　(2) $n=6, 7, 8$

解説

(1) ① $\log_{100}1=0$

② 与式 $=\log_5\sqrt{2}+\log_5\sqrt{\frac{25}{12}}+\log_5(\sqrt[3]{6})^{\frac{3}{2}}$

$=\log_5\left(\sqrt{2}\times\sqrt{\frac{25}{12}}\times\sqrt{6}\right)=\log_5 5=1$

③ $\log_4 5\cdot\log_5 8=\frac{\log_2 5}{\log_2 2^2}\cdot\frac{\log_2 2^3}{\log_2 5}=\frac{3}{2}$

④ 与式 $=\log_2 10\cdot\frac{\log_2 10}{\log_2 5}-\left(\log_2 5+\frac{1}{\log_2 5}\right)$

$=(\log_2 2+\log_2 5)\cdot\frac{\log_2 2+\log_2 5}{\log_2 5}-\log_2 5-\frac{1}{\log_2 5}$

$=(1+\log_2 5)\left(\frac{1}{\log_2 5}+1\right)-\log_2 5-\frac{1}{\log_2 5}$

$=\frac{1}{\log_2 5}+1+1+\log_2 5-\log_2 5-\frac{1}{\log_2 5}=2$

⑤ $\sqrt{5+\sqrt{24}}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}+\sqrt{2}$

$\sqrt{5-\sqrt{24}}=\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$

よって　与式 $=\log_{16}\{(\sqrt{3}+\sqrt{2})-(\sqrt{3}-\sqrt{2})\}$

$=\log_{16}2\sqrt{2}=\frac{\log_2 2\sqrt{2}}{\log_2 16}=\frac{\frac{3}{2}}{4}=\frac{3}{8}$

⑥ $a^{-\log_a x}=a^{\log_a x^{-1}}=x^{-1}=\frac{1}{x}$

(2) ① $\log_{\frac{1}{4}}5=\frac{\log_{\frac{1}{2}}5}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}5=\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5}$

$-2=\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\log_{\frac{1}{2}}4$

底 $\frac{1}{2}$ は1より小さく, $\sqrt{5}<3<4$ であるから

$\log_{\frac{1}{2}}4<\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{5}$　すなわち　$-2<\log_{\frac{1}{2}}3<\log_{\frac{1}{4}}5$

② $1.5=\log_4 4^{1.5}=\log_4 4^{\frac{3}{2}}=\log_4 8$

底4は1より大きいから

$\log_4 8<\log_4 9$　ゆえに　$1.5<\log_4 9$

また　$1.5=\log_9 9^{1.5}=\log_9 9^{\frac{3}{2}}=\log_9 27$

底9は1より大きいから

$\log_9 25<\log_9 27$　ゆえに　$\log_9 25<1.5$

したがって　$\log_9 25<1.5<\log_4 9$

(3) $\log_4 45=\frac{\log_2(3^2\times5)}{\log_2 4}=\frac{2\log_2 3+\log_2 5}{2}=\frac{2a+b}{2}=a+\frac{b}{2}$

$\log_{20}80=\frac{\log_2 80}{\log_2 20}=\frac{\log_2(2^4\times5)}{\log_2(2^2\times5)}=\frac{4\log_2 2+\log_2 5}{2\log_2 2+\log_2 5}=\frac{4+\log_2 5}{2+\log_2 5}$

ここで　$\log_2 5=\frac{\log_3 5}{\log_3 2}=\log_2 3\cdot\log_3 5=ab$　よって　$\log_{20}80=\frac{4+ab}{2+ab}$

(4) ① $\log_{10}6^{52}=52\log_{10}(2\times3)=52(\log_{10}2+\log_{10}3)$

$=52\times(0.3010+0.4771)=40.4612$

よって　$40<\log_{10}6^{52}<41$　ゆえに　$10^{40}<6^{52}<10^{41}$

したがって, 6^{52} は41桁の整数である。

② $\log_{10}\frac{1}{(\sqrt{2})^{25}}=-\frac{25}{2}\log_{10}2=-\frac{25}{2}\times0.3010=-3.7625$

よって　$-4<\log_{10}\frac{1}{(\sqrt{2})^{25}}<-3$　ゆえに　$10^{-4}<\frac{1}{(\sqrt{2})^{25}}<10^{-3}$

したがって, $\frac{1}{(\sqrt{2})^{25}}$ は小数第4位に初めて0でない数字が現れる。

③ $\left(\frac{1}{3}\right)^n<0.0001$ の両辺の常用対数をとると, 底10は1より大きいから

$\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^n<\log_{10}0.0001$　よって　$\log_{10}3^{-n}<\log_{10}10^{-4}$

すなわち　$-n\log_{10}3<-4$

ゆえに　$n>\frac{4}{\log_{10}3}=\frac{4}{0.4771}=8.3\cdots\cdots$

これを満たす最小の整数 n は　9

④ 2.25^n の整数部分が3桁であるから　$10^2\leqq2.25^n<10^3$

各辺の常用対数をとると　$2\leqq n\log_{10}2.25<3$　……①

ここで

$\log_{10}2.25=\log_{10}\frac{225}{100}=\log_{10}\frac{9}{4}=\log_{10}\left(\frac{3}{2}\right)^2=2(\log_{10}3-\log_{10}2)$

$=2(0.4771-0.3010)=0.3522$

よって, ①から　$2\leqq0.3522n<3$　ゆえに　$\frac{2}{0.3522}\leqq n<\frac{3}{0.3522}$

すなわち　$5.6\cdots\cdots\leqq n<8.5\cdots\cdots$

これを満たす整数 n は　$n=6, 7, 8$

2 1枚で70%の花粉を除去できるフィルターがある。99.99%より多くの花粉を一度に除去するには, このフィルターは最低何枚必要か。ただし, $\log_{10}3=0.4771$ とする。

解答 8枚

解説

1枚のフィルターで30%の花粉が残るから, n 枚のフィルターでは 0.3^n の花粉が残る。

よって, 求める条件は

$0.3^n<1-0.9999$　すなわち　$0.3^n<0.0001$

この両辺の常用対数をとると

$n\log_{10}0.3<\log_{10}0.0001$

この不等式を変形して

$n\log_{10}(3\times10^{-1})<\log_{10}10^{-4}$

$n(\log_{10}3-1)<-4$

$-0.5229n<-4$

よって　$n>\frac{4}{0.5229}=7.6\cdots\cdots$

したがって, フィルターは最低8枚必要である。

3 関数 $y=(\log_3 x)^2-4\log_3 x+3$　$(1\leqq x\leqq27)$ の最大値, 最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。

解答　$x=1$ で最大値3, $x=9$ で最小値 -1

解説

$\log_3 x=t$ とおく。

$\log_3 x$ の底3は1より大きいから, $1\leqq x\leqq27$ のとき

$\log_3 1\leqq\log_3 x\leqq\log_3 27$

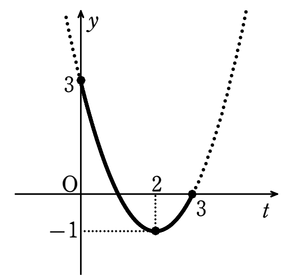
よって　$0\leqq t\leqq3$　……①

また　$y=t^2-4t+3=(t-2)^2-1$

①の範囲で y は

$t=0$ で最大値3, $t=2$ で最小値 -1

をとる。



$t=0$ のとき　$\log_3 x=0$　ゆえに　$x=1$

$t=2$ のとき　$\log_3 x=2$　ゆえに　$x=9$

したがって, y は

$x=1$ で最大値3, $x=9$ で最小値 -1 をとる。

4 次の方程式，不等式を解け。

(1) $\log_3(3x-1)=2.5$　(2) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>1$　(3) $\log_{10}(x+2)(x+5)=1$

(4) $\log_2(3-x)=\log_4(2x+18)$　(5) $2\log_{0.1}(x-1)<\log_{0.1}(7-x)$

(6) $\log_2(1-x)+\log_2(3-x)<1+\log_2 3$　(7) $\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2-\log_{\frac{1}{4}}x=0$

(8) $\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right)^2+\log_{\frac{1}{3}}x^2-15>0$

(1)		(2)	
(3)		(4)	
(5)		(6)	
(7)		(8)	

解答　(1) $x=3\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}$　(2) $1<x<\dfrac{4}{3}$　(3) $x=0,\ -7$　(4) $x=-1$

(5) $3<x<7$　(6) $2-\sqrt{7}<x<1$　(7) $x=1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(8) $0<x<\dfrac{1}{27},\ 243<x$

解説

(1) 対数の定義から　$3x-1=3^{2.5}$ …… ①

ここで　$3^{2.5}=3^{\frac{5}{2}}=9\sqrt{3}$　よって，① から　$3x-1=9\sqrt{3}$

これを解いて　$x=3\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}$

(2) 真数は正であるから

$x-1>0$　ゆえに　$x>1$ …… ①

与えられた不等式は　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{3}$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x-1<\dfrac{1}{3}$　よって　$x<\dfrac{4}{3}$ …… ②

①，② から，解は　$1<x<\dfrac{4}{3}$

(3) 対数の定義から　$(x+2)(x+5)=10^1$

整理して　$x^2+7x=0$　すなわち　$x(x+7)=0$

これを解いて　$x=0,\ -7$

(4) 真数は正であるから　$3-x>0$ かつ $2x+18>0$

よって　$-9<x<3$ …… ①

方程式を変形すると

$$\log_2(3-x)=\frac{\log_2(2x+18)}{\log_2 4}\quad すなわち\quad \log_2(3-x)=\frac{\log_2(2x+18)}{2}$$

両辺に 2 を掛けて

$$2\log_2(3-x)=\log_2(2x+18)\quad すなわち\quad \log_2(3-x)^2=\log_2(2x+18)$$

ゆえに　$(3-x)^2=2x+18$　整理して　$x^2-8x-9=0$

すなわち　$(x+1)(x-9)=0$　① から，解は　$x=-1$

(5) 真数は正であるから　$x-1>0$ かつ $7-x>0$

よって　$1<x<7$ …… ①

与えられた不等式は　$\log_{0.1}(x-1)^2<\log_{0.1}(7-x)$

底 0.1 は 1 より小さいから　$(x-1)^2>7-x$

整理して　$x^2-x-6>0$　すなわち　$(x+2)(x-3)>0$

これを解いて　$x<-2,\ 3<x$ …… ②

①，② から，解は　$3<x<7$

(6) 真数は正であるから　$1-x>0$ かつ $3-x>0$

よって　$x<1$ …… ①

$1+\log_2 3=\log_2 2+\log_2 3=\log_2 6$ であるから，与えられた不等式は

$\log_2(1-x)(3-x)<\log_2 6$

底 2 は 1 より大きいから　$(1-x)(3-x)<6$

整理して　$x^2-4x-3<0$

これを解いて　$2-\sqrt{7}<x<2+\sqrt{7}$ …… ②

①，② から，解は　$2-\sqrt{7}<x<1$

(7) 方程式を変形すると

$$\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2-\frac{\log_{\frac{1}{2}}x}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}=0\quad すなわち\quad \left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)^2-\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}x=0$$

$\log_{\frac{1}{2}}x=t$ とおくと　$t^2-\dfrac{t}{2}=0$　よって　$t\left(t-\dfrac{1}{2}\right)=0$　ゆえに　$t=0,\ \dfrac{1}{2}$

$t=0$ すなわち $\log_{\frac{1}{2}}x=0$ のとき　$x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^0=1$

$t=\dfrac{1}{2}$ すなわち $\log_{\frac{1}{2}}x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　したがって　$x=1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(8) 真数は正であるから　$x>0$ …… ①

不等式を変形すると

$\left(\log_{\frac{1}{3}}x\right)^2+2\log_{\frac{1}{3}}x-15>0$

$\log_{\frac{1}{3}}x=t$ とおくと　$t^2+2t-15>0$　よって　$(t-3)(t+5)>0$

これを解いて　$t<-5,\ 3<t$　ゆえに　$\log_{\frac{1}{3}}x<-5,\ 3<\log_{\frac{1}{3}}x$

すなわち　$\log_{\frac{1}{3}}x<\log_{\frac{1}{3}}243,\ \log_{\frac{1}{3}}\dfrac{1}{27}<\log_{\frac{1}{3}}x$

底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さいから　$x>243,\ \dfrac{1}{27}>x$ …… ②

①，② から，解は　$0<x<\dfrac{1}{27},\ 243<x$

5 連立方程式 $\begin{cases}\log_{10}x+\log_{10}y=2\\ x+y=25\end{cases}$ を解け。

解答　$x=5,\ y=20$ または $x=20,\ y=5$

解説

$\begin{cases}\log_{10}x+\log_{10}y=2 & \cdots\cdots ①\\ x+y=25 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

真数は正であるから　$x>0$ かつ $y>0$ …… ③

① から　$\log_{10}xy=\log_{10}100$　よって　$xy=100$ …… ④

また，② から　$y=25-x$ …… ⑤

これを ④ に代入して　$x(25-x)=100$　ゆえに　$x^2-25x+100=0$

これを解いて　$x=5,\ 20$

⑤ から　$x=5$ のとき $y=20$，$x=20$ のとき $y=5$

これらは ③ を満たす。

よって　$x=5,\ y=20$ または $x=20,\ y=5$

6 $x>0,\ y>0,\ x+2y=8$ のとき，$\log_{10}x+\log_{10}y$ の最大値を求めよ。

解答　$x=4,\ y=2$ で最大値 $3\log_{10}2$

解説

$x+2y=8$ から　$x=8-2y$ …… ①

$x>0$ から　$8-2y>0$　よって　$y<4$

$y>0$ と合わせて　$0<y<4$ …… ②

$$\begin{aligned}\log_{10}x+\log_{10}y&=\log_{10}xy=\log_{10}(8-2y)y\\&=\log_{10}(-2y^2+8y)\\&=\log_{10}\{-2(y-2)^2+8\}\end{aligned}$$

$-2(y-2)^2+8$ は，② の範囲で $y=2$ で最大値 8 をとる。

底 10 は 1 より大きいから，このとき $\log_{10}\{-2(y-2)^2+8\}$ も最大で，

その最大値は　$\log_{10}8=3\log_{10}2$

また，① から，$y=2$ のとき　$x=4$

よって，$\log_{10}x+\log_{10}y$ は $x=4,\ y=2$ で最大値 $3\log_{10}2$ をとる。

7 $\log_{10}1.4=0.146,\ \log_{10}1.8=0.255,\ \log_{10}2.1=0.322$ とするとき，$\log_{10}2,\ \log_{10}3,\ \log_{10}7$ の値を求めよ。また，$\log_{10}63$ の値を求めよ。

解答　$\log_{10}2=0.301,\ \log_{10}3=0.477,\ \log_{10}7=0.845,\ \log_{10}63=1.799$

解説

$\log_{10}1.4=\log_{10}(2\times7\times10^{-1})=\log_{10}2+\log_{10}7-1,$

$\log_{10}1.8=\log_{10}(2\times3^2\times10^{-1})=\log_{10}2+2\log_{10}3-1,$

$\log_{10}2.1=\log_{10}(3\times7\times10^{-1})=\log_{10}3+\log_{10}7-1$

ここで，$\log_{10}1.4=0.146,\ \log_{10}1.8=0.255,\ \log_{10}2.1=0.322$ であるから

$\log_{10}2+\log_{10}7=1.146$ …… ①

$\log_{10}2+2\log_{10}3=1.255$ …… ②

$\log_{10}3+\log_{10}7=1.322$ …… ③

① ～ ③ から

$\log_{10}2=0.301,\ \log_{10}3=0.477,\ \log_{10}7=0.845$

また　$\log_{10}63=\log_{10}(3^2\times7)=2\log_{10}3+\log_{10}7$

$=2\times0.477+0.845=1.799$