$\boxed{1}$ 以下の問に答えよ。

(1) θ の動径が第2象限にあり，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\cos\theta$ と $\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$\sin\theta\cos\theta$，$\sin^3\theta+\cos^3\theta$ の値を求めよ。

(3) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\sin(3\pi-\theta)-\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)\cos(\pi-\theta)$ を簡単にせよ。

(4) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を解け。

(5) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を解け。

(6) $0\leqq\theta<2\pi$ のとき，不等式 $2\sin^2\theta-4<5\cos\theta$ を解け。

(7) $\sin\dfrac{\pi}{12}$ の値を求めよ。

(8) 次の2直線 $x-2y+4=0$，$3x-y-3=0$ のなす角 θ を求めよ。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(1)		(2)	
(3)		(4)	
(5)		(6)	
(7)		(8)	

解答　(1) $\cos\theta=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$　(2) $-\dfrac{1}{8}$，$\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$　(3) -1

(4) $\theta=\dfrac{11}{12}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi$　(5) $\dfrac{7}{24}\pi<\theta<\dfrac{11}{24}\pi$，$\dfrac{31}{24}\pi<\theta<\dfrac{35}{24}\pi$

(6) $0\leqq\theta<\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi<\theta<2\pi$　(7) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$　(8) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$

解説

(1) θ の動径が第2象限にあるから　$\cos\theta<0$

よって，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ から

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$$

また　$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\div\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)=-\dfrac{1}{2}$

(2) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ の両辺を2乗して

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{3}{4}$$

よって　$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$　ゆえに　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{8}$

また　$\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)(\sin^2\theta-\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta)$

$=(\sin\theta+\cos\theta)(1-\sin\theta\cos\theta)$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{8}\right)\right\}=\dfrac{9\sqrt{3}}{16}$

(3) $\sin(3\pi-\theta)=\sin(2\pi+\pi-\theta)=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

また　$\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)=\sin\left(\pi+\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\cos\theta$

よって　与式$=(-\sin\theta)\sin\theta-(-\cos\theta)(-\cos\theta)=-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=-1$

(4) $0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{9}{4}\pi$

よって，方程式 $\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ から　$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{7}{6}\pi$，$\dfrac{13}{6}\pi$

ゆえに　$\theta=\dfrac{11}{12}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi$

(5) $0\leqq\theta<2\pi$ から　$\dfrac{\pi}{4}\leqq2\theta+\dfrac{\pi}{4}<4\pi+\dfrac{\pi}{4}$

よって，不等式 $\cos\left(2\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から

$$\frac{5}{6}\pi<2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{7}{6}\pi,\quad \frac{17}{6}\pi<2\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{19}{6}\pi$$

ゆえに　$\dfrac{7}{24}\pi<\theta<\dfrac{11}{24}\pi$，$\dfrac{31}{24}\pi<\theta<\dfrac{35}{24}\pi$

(6) $2\sin^2\theta-4<5\cos\theta$ から　$2(1-\cos^2\theta)-4<5\cos\theta$

よって　$2\cos^2\theta+5\cos\theta+2>0$

ゆえに　$(\cos\theta+2)(2\cos\theta+1)>0$　……①

$\cos\theta+2>0$ であるから，① より　$2\cos\theta+1>0$　よって　$\cos\theta>-\dfrac{1}{2}$

$0\leqq\theta<2\pi$ であるから，解は　$0\leqq\theta<\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi<\theta<2\pi$

(7) $\sin^2\dfrac{\pi}{12}=\sin^2\dfrac{\frac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

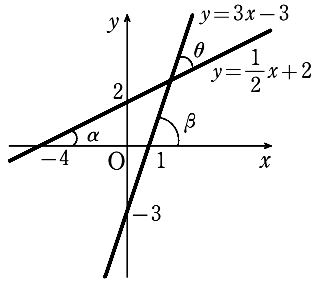
$\sin\dfrac{\pi}{12}>0$ であるから

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{8}}$$

$$=\sqrt{\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{8}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(8) $x-2y+4=0$ から　$y=\dfrac{1}{2}x+2$

$3x-y-3=0$ から　$y=3x-3$



図のように，2直線と x 軸の正の向きとのなす角を，それぞれ α，β とすると，求める角 θ は $\beta-\alpha$ である。

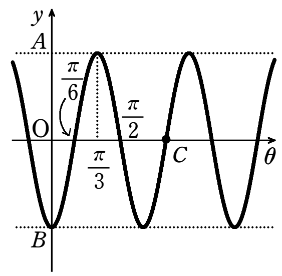
$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，$\tan\beta=3$ であるから

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

$$=\frac{3-\frac{1}{2}}{1+3\cdot\frac{1}{2}}=1$$

ゆえに，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$

$\boxed{2}$ 右の図は，関数 $y=2\sin(a\theta-b)$ のグラフである。$a>0$，$0<b<2\pi$ のとき，(1)a，b および(2)図中の目盛り A，B，C の値を求めよ。



解答　(1)$a=3$，$b=\dfrac{\pi}{2}$，(2)$A=2$，$B=-2$，$C=\dfrac{5}{6}\pi$

(1)	a		b		
(2)	A		B		C	

解説

(1)$y=2\sin(a\theta-b)$ を変形すると　$y=2\sin a\left(\theta-\dfrac{b}{a}\right)$　……①

図から，周期は　$\dfrac{\pi}{3}\times2=\dfrac{2}{3}\pi$

よって　$2\pi\div a=\dfrac{2}{3}\pi$　ゆえに　$a=3$

このとき，① は　$y=2\sin3\left(\theta-\dfrac{b}{3}\right)$

よって，図のグラフは，$y=2\sin3\theta$ のグラフを θ 軸方向に $\dfrac{b}{3}$ だけ平行移動したものである。

ここで，$0<b<2\pi$ から　$0<\dfrac{b}{3}<\dfrac{2}{3}\pi$

したがって　$\dfrac{b}{3}=\dfrac{\pi}{6}$　ゆえに　$b=\dfrac{\pi}{2}$

(2)また　$A=2$，$B=-2$，$C=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{5}{6}\pi$

$\boxed{3}$ α，β，γ は鋭角，$\tan\alpha=2$，$\tan\beta=5$，$\tan\gamma=8$ のとき $\alpha+\beta+\gamma$ を求めよ。

解答　$\dfrac{5}{4}\pi$

解説

$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{2+5}{1-2\cdot5}=-\dfrac{7}{9}$

$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\dfrac{-\frac{7}{9}+8}{1-\left(-\frac{7}{9}\right)\cdot8}=1$

ここで，$\sqrt{3}<2<5<8$ であるから　$\tan\dfrac{\pi}{3}<\tan\alpha<\tan\beta<\tan\gamma$

α，β，γ は鋭角であるから　$\dfrac{\pi}{3}<\alpha<\beta<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$

よって　$\pi<\alpha+\beta+\gamma<\dfrac{3}{2}\pi$

ゆえに，$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=1$ から　$\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{5}{4}\pi$

$\boxed{4}$ $0 \leqq x < 2\pi$ のとき，次の方程式，不等式を解け。

(1) $\sin 2x = \cos x$　　(2) $\cos x + \sin 2x > 0$

解答 (1) $x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$　　(2) $0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

解説

(1) $\sin 2x = \cos x$ から　$2\sin x\cos x = \cos x$

よって　$\cos x(2\sin x - 1) = 0$

ゆえに　$\cos x = 0$ または $\sin x = \dfrac{1}{2}$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから　$\cos x = 0$ のとき　$x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\sin x = \dfrac{1}{2}$ のとき　$x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{5}{6}\pi$　したがって，解は　$x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$

(2) $\cos x + \sin 2x > 0$ から　$\cos x + 2\sin x\cos x > 0$

よって　$\cos x(2\sin x + 1) > 0$

ゆえに　$(\cos x > 0$ かつ $2\sin x + 1 > 0)$ または $(\cos x < 0$ かつ $2\sin x + 1 < 0)$

すなわち $\left(\cos x > 0 \text{ かつ } \sin x > -\dfrac{1}{2}\right)$ …①

または $\left(\cos x < 0 \text{ かつ } \sin x < -\dfrac{1}{2}\right)$ …②

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから，① より

$\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi < x < 2\pi\right)$ かつ $\left(0 \leqq x < \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi < x < 2\pi\right)$

よって　$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

$0 \leqq x < 2\pi$ であるから，② より

$\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3}{2}\pi$ かつ $\dfrac{7}{6}\pi < x < \dfrac{11}{6}\pi$　よって　$\dfrac{7}{6}\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi$

したがって，解は　$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{7}{6}\pi < x < \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi < x < 2\pi$

$\boxed{5}$ 次の関数の最大値，最小値と，そのときの x の値を求めよ。

$$y = \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + 3\cos^2 x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$$

解答 $x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$ で最大値 4，$x = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ で最小値 0

解説

$y = \dfrac{1 - \cos 2x}{2} + \sqrt{3}\sin 2x + 3 \cdot \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

$= \sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 2 = 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 2$

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $\dfrac{\pi}{6} \leqq 2x + \dfrac{\pi}{6} < \dfrac{25}{6}\pi$ であるから　$-1 \leqq \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 1$

よって　$0 \leqq y \leqq 4$

また，$\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 1$ のとき　$2x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{2}\pi$　すなわち $x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$

$\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$ のとき　$2x + \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi$　すなわち $x = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$

ゆえに，この関数は　$x = \dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{7}{6}\pi$ で最大値 4，$x = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ で最小値 0　をとる。

$\boxed{6}$ $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $2\cos 2\theta + 4\cos\theta + 3 - a = 0$ を満たす θ がちょうど2個あるような定数 a の範囲を求めよ。

解答 $a = 0$，$1 < a < 9$

解説

方程式を変形すると　$2(2\cos^2\theta - 1) + 4\cos\theta + 3 - a = 0$

よって　$4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1 = a$

$y = 4\cos^2\theta + 4\cos\theta + 1$，$\cos\theta = t$ とおくと　$y = 4t^2 + 4t + 1 = 4\left(t + \dfrac{1}{2}\right)^2$　…… ①

また　$-1 \leqq t \leqq 1$

$-1 \leqq t \leqq 1$ における，関数 ① のグラフと直線 $y = a$ の共有点の個数を調べると，[図] から

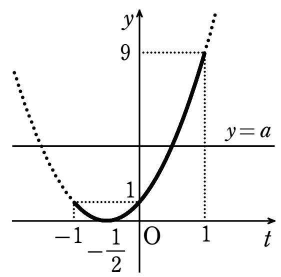
$a = 0$，$1 < a < 9$ のとき　$-1 < t < 1$ の範囲に 1 個

$\cos\theta = t$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の解の個数は

$t = \pm 1$ のとき 1 個，$-1 < t < 1$ のとき 2 個

であるから，

$a = 0$，$1 < a < 9$



$\boxed{7}$ $y = 3\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \cos^2 x - 6\sin x + 2\sqrt{3}\cos x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ とする。

(1) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = t$ とおいて，y を t で表せ。

(2) y の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。

解答 (1) $y = t^2 - 2\sqrt{3}t$　　(2) $x = 0$ で最大値 $1 + 2\sqrt{3}$，$x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 -3

解説

(1) $y = (\sqrt{3}\sin x - \cos x)^2 - 2\sqrt{3}(\sqrt{3}\sin x - \cos x)$

よって　$y = t^2 - 2\sqrt{3}t$　…… ①

(2) $t = \sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$

$0 \leqq x \leqq \pi$ から　$-\dfrac{\pi}{6} \leqq x - \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{5}{6}\pi$　よって　$-\dfrac{1}{2} \leqq \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 1$

ゆえに　$-1 \leqq t \leqq 2$　…… ②

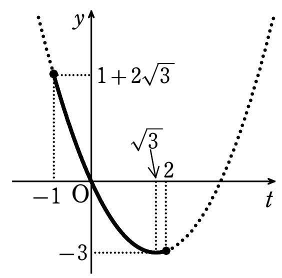
① を変形すると　$y = (t - \sqrt{3})^2 - 3$

② の範囲で，y は

$t = -1$ で最大値 $1 + 2\sqrt{3}$，

$t = \sqrt{3}$ で最小値 -3

をとる。



$t = -1$ のとき　$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

よって　$x - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{\pi}{6}$　ゆえに　$x = 0$

$t = \sqrt{3}$ のとき　$\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって　$x - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi$　ゆえに　$x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi$

したがって，y は　$x = 0$ で最大値 $1 + 2\sqrt{3}$，$x = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi$ で最小値 -3　をとる。