1 以下の問に答えよ。

(1) 関数 $g(x)=2x^2-3x+1$ について，$g(a-1)$ の値を求めよ。

(2) 2次関数 $y=-2x^2+6x+3$ の軸と頂点を求めよ。

(3) 放物線 $y=x^2-4x+4$ は，どのように平行移動すると放物線 $y=x^2+2x-1$ に重なるか。

(4) 放物線 $y=3x^2+x-4$ を x 軸方向に1，y 軸方向に -2 だけ平行移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(5) 放物線 $y=x^2-x-6$ を原点に関して，対称移動して得られる放物線の方程式を求めよ。

(6) 関数 $y=-x^2+6x+c$ $(1\leqq x\leqq 4)$ の最小値が -2 であるように，定数 c の値を定めよ。また，そのときの最大値を求めよ。

(7) 頂点が点 $(-1,\ 3)$ で，点 $(1,\ 11)$ を通る2次関数を求めよ。

(8) 軸が直線 $x=-2$ で，2点 $(0,\ 3)$，$(-1,\ 0)$ を通る2次関数を求めよ。

(9) $x=2$ で最大値4をとり，点 $(1,\ 2)$ を通る2次関数を求めよ。

(10) 放物線 $y=x^2-3x$ を平行移動した曲線で，2点 $(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$ を通る2次関数を求めよ。

(1)			
(2) 軸		頂点	
(3)		(4)	
(5)			
(6) c		最大値	
(7)		(8)	
(9)		(10)	

解答 (1) $2a^2-7a+6$　(2) 直線 $x=\dfrac{3}{2}$，点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{15}{2}\right)$

(3) x 軸方向に -3，y 軸方向に -2 だけ平行移動

(4) $y=3x^2-5x-4\left(y=3\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2-\dfrac{73}{12}\right)$　(5) $y=-x^2-x+6$

(6) $c=-7$，$x=3$ で最大値2　(7) $y=2(x+1)^2+3\,(y=2x^2+4x+5)$

(8) $y=(x+2)^2-1\,(y=x^2+4x+3)$　(9) $y=-2(x-2)^2+4\,(y=-2x^2+8x-4)$

(10) $y=x^2-x+1$

解説

(1) $g(a-1)=2(a-1)^2-3(a-1)+1=2a^2-4a+2-3a+3+1=2a^2-7a+6$

(2) $y=-2x^2+6x+3$

$$=-2(x^2-3x)+3=-2\left\{x^2-3x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+3$$

$$=-2\left\{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right\}+3=-2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{2}$$

軸は直線 $x=\dfrac{3}{2}$，頂点は点 $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{15}{2}\right)$

(3) $y=x^2-4x+4$ から　$y=(x-2)^2$　…… ①

$y=x^2+2x-1$ から　$y=(x+1)^2-2$　…… ②

よって，①，② の頂点の座標はそれぞれ　$(2,\ 0)$，$(-1,\ -2)$

① を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動したとき，② に重なるとすると

$2+p=-1$，　$0+q=-2$　　ゆえに　$p=-3$，$q=-2$

よって，x 軸方向に -3，y 軸方向に -2 だけ平行移動すればよい。

(4) $y=3x^2+x-4=3\left(x+\dfrac{1}{6}\right)^2-\dfrac{49}{12}$

この放物線の頂点 $\left(-\dfrac{1}{6},\ -\dfrac{49}{12}\right)$ が移る点は　$\left(-\dfrac{1}{6}+1,\ -\dfrac{49}{12}-2\right)$

すなわち　$\left(\dfrac{5}{6},\ -\dfrac{73}{12}\right)$

よって，求める放物線の方程式は　$y=3\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2-\dfrac{73}{12}$　$(y=3x^2-5x-4)$

(5) 原点に関して対称移動した放物線の方程式は

$-y=(-x)^2-(-x)-6$　すなわち　$y=-x^2-x+6$

(6) $y=-x^2+6x+c=-(x-3)^2+9+c$

よって，この関数は $x=1$ で最小値をとる。

$x=1$ のとき　$y=-1^2+6\cdot1+c=5+c$

最小値が -2 であるとき　$5+c=-2$

したがって　$c=-7$

このとき，$x=3$ で最大値 $9+c=2$ をとる。

(7) 頂点の座標が $(-1,\ 3)$ であるから，求める2次関数は $y=a(x+1)^2+3$ と表される。

グラフが点 $(1,\ 11)$ を通るから　$11=4a+3$　ゆえに　$a=2$

よって，求める2次関数は　$y=2(x+1)^2+3$　$(y=2x^2+4x+5)$

(8) 軸が直線 $x=-2$ であるから，求める2次関数は $y=a(x+2)^2+q$ と表される。

グラフが2点 $(0,\ 3)$，$(-1,\ 0)$ を通るから　$3=4a+q$，$0=a+q$

これを解くと　$a=1$，$q=-1$

よって，求める2次関数は　$y=(x+2)^2-1$　$(y=x^2+4x+3)$

(9) $x=2$ で最大値4をとるから，求める2次関数は $y=a(x-2)^2+4$ $(a<0)$ と表される。

点 $(1,\ 2)$ を通るから　$2=a+4$

ゆえに　$a=-2$

これは $a<0$ を満たす。

よって，求める2次関数は　$y=-2(x-2)^2+4$　$(y=-2x^2+8x-4)$

(2) 放物線 $y=x^2-3x$ を平行移動した曲線であるから，求める放物線の方程式は

$y=x^2+bx+c$ と表される。これが2点 $(1,\ 1)$，$(2,\ 3)$ を通るから

$1+b+c=1$，　$4+2b+c=3$　　これを解いて　$b=-1$，$c=1$

よって，求める放物線の方程式は　$y=x^2-x+1$

2 a は定数とする。関数 $y=x^2-2x+1$ $(a\leqq x\leqq a+1)$ について，次の問いに答えよ。

(1) 最小値を求めよ。

(2) 最大値を求めよ。

解答 (1) $a<0$ のとき　$x=a+1$ で最小値 a^2

$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$x=1$ で最小値0

$1<a$ のとき　$x=a$ で最小値 a^2-2a+1

(2) $a<\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=a$ で最大値 a^2-2a+1

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{1}{4}$

$\dfrac{1}{2}<a$ のとき　$x=a+1$ で最大値 a^2

解説

$y=x^2-2x+1=(x-1)^2$　$(a\leqq x\leqq a+1)$

$x=a$ のとき　$y=a^2-2a+1$，$x=a+1$ のとき　$y=a^2$，$x=1$ のとき　$y=0$

(1) [1] $a+1<1$ すなわち $a<0$ のとき

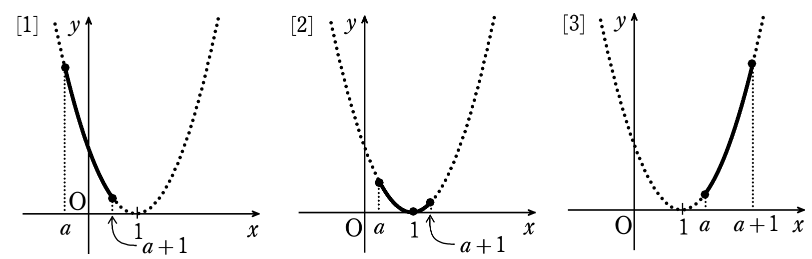
グラフは [図] の実線部分のようになる。　よって，$x=a+1$ で最小値 a^2　をとる。

[2] $a\leqq 1\leqq a+1$ すなわち $0\leqq a\leqq 1$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。　よって，$x=1$ で最小値0　をとる。

[3] $1<a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。よって，$x=a$ で最小値 a^2-2a+1　をとる。



(2) 定義域の中央の値は　$a+\dfrac{1}{2}$

[1] $a+\dfrac{1}{2}<1$ すなわち $a<\dfrac{1}{2}$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。よって，$x=a$ で最大値 a^2-2a+1　をとる。

[2] $a+\dfrac{1}{2}=1$ すなわち $a=\dfrac{1}{2}$ のとき

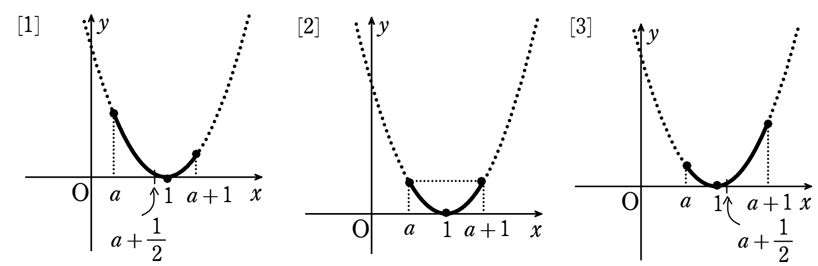
グラフは [図] の実線部分のようになる。

このとき，軸は定義域の中央にあり，$x=a$，$x=a+1$ における y の値が一致する。

よって，$x=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{1}{4}$　をとる。

[3] $1<a+\dfrac{1}{2}$ すなわち $\dfrac{1}{2}<a$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。　よって，$x=a+1$ で最大値 a^2　をとる。



3　ある放物線を，x 軸方向に -1，y 軸方向に -3 だけ平行移動し，更に x 軸に関して対称移動したら，放物線 $y=x^2-2x+2$ に移った。もとの放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=-x^2+4x-2$

解説

求める放物線は，放物線 $y=x^2-2x+2$ を x 軸に関して対称移動し，更に x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動したものである。

まず，x 軸に関して対称移動すると

$-y=x^2-2x+2$　　すなわち　　$y=-x^2+2x-2$

次に，x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると　$y-3=-(x-1)^2+2(x-1)-2$

よって　　$y=-x^2+4x-2$

4　2 次関数のグラフが 3 点$(-2,\ 16)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 21)$を通るとき，その 2 次関数を求めよ。

解答　$y=3x^2-2x$

解説

求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とする。

このグラフが 3 点 $(-2,\ 16)$，$(1,\ 1)$，$(3,\ 21)$ を通るから

$$\begin{cases} 4a-2b+c=16 & \cdots\cdots ① \\ a+b+c=1 & \cdots\cdots ② \\ 9a+3b+c=21 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①−② から　$3a-3b=15$　　よって　$a-b=5$　……④

③−② から　$8a+2b=20$　　よって　$4a+b=10$　……⑤

④+⑤ から　$5a=15$　　よって　$a=3$

$a=3$ を ④ に代入して　$3-b=5$　　ゆえに　$b=-2$

$a=3$，$b=-2$ を ② に代入して　$3-2+c=1$　　ゆえに　$c=0$

よって，求める 2 次関数は　$y=3x^2-2x$

5　放物線 $y=-2x^2+5x$ を平行移動した曲線で，点 $(1,\ -3)$ を通り，頂点が直線 $y=-2x+3$ 上にある放物線の方程式を求めよ。

解答　$y=-2(x+1)^2+5$，$y=-2(x-2)^2-1$ $(y=-2x^2-4x+3$，$y=-2x^2+8x-9)$

解説

頂点が直線 $y=-2x+3$ 上にあるから，その座標は $(p,\ -2p+3)$ とおける。

また，放物線 $y=-2x^2+5x$ を平行移動した曲線であるから，その方程式は

$$y=-2(x-p)^2-2p+3$$

と表される。これが点 $(1,\ -3)$ を通るから　$-3=-2(1-p)^2-2p+3$

整理して　$2p^2-2p-4=0$　　よって　$(p+1)(p-2)=0$

ゆえに　$p=-1,\ 2$

よって，求める放物線の方程式は

$$y=-2(x+1)^2+5,\quad y=-2(x-2)^2-1\ (y=-2x^2-4x+3,\ y=-2x^2+8x-9)$$

6　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y=4$ のとき，x のとりうる値の範囲を求めよ。また，x^2+y^2 の最大値，最小値と，そのときの x，y の値を求めよ。

解答　$0\leqq x\leqq 4$；$x=0$，$y=4$ または $x=4$，$y=0$ で最大値 16；$x=y=2$ で最小値 8

解説

$x+y=4$ から　$y=4-x$　……①

$y\geqq 0$ から　$4-x\geqq 0$　　よって　$x\leqq 4$

$x\geqq 0$ と合わせて　$0\leqq x\leqq 4$　……②

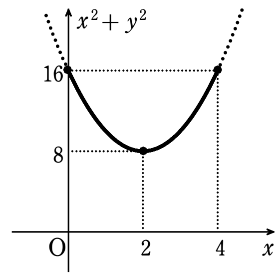
また　$x^2+y^2=x^2+(4-x)^2=2x^2-8x+16$

$=2(x-2)^2+8$

よって，② の範囲の x について x^2+y^2 は

$x=0$ または $x=4$ で最大値 16,

$x=2$ で最小値 8 をとる。



ここで，① から

$x=0$ のとき $y=4$，$x=4$ のとき $y=0$，$x=2$ のとき $y=2$

以上から，x^2+y^2 は

$x=0$，$y=4$ または $x=4$，$y=0$ で最大値 16，$x=y=2$ で最小値 8 をとる。

7　関数 $y=x^2-2ax-a$ $(0\leqq x\leqq 2)$ の最小値が -2 であるように，定数 a の値を定めよ。

解答　$a=1$

解説

$y=x^2-2ax-a=(x-a)^2-a^2-a$　$(0\leqq x\leqq 2)$

[1]　$a<0$ のとき

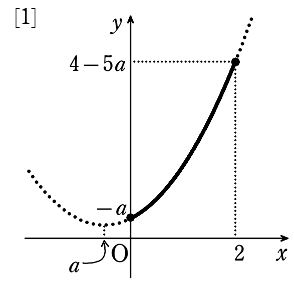
グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=0$ で最小値 $-a$ をとる。

条件から　$-a=-2$

よって　$a=2$

これは $a<0$ を満たさない。



[2]　$0\leqq a\leqq 2$ のとき

グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=a$ で最小値 $-a^2-a$ をとる。

条件から　$-a^2-a=-2$

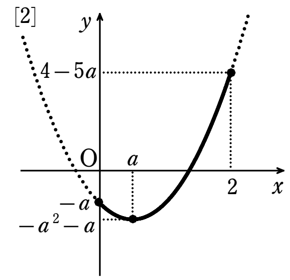
$a^2+a-2=0$

$(a-1)(a+2)=0$

よって　$a=1,\ -2$

このうち，$0\leqq a\leqq 2$ を満たすものは

$a=1$



[3]　$2<a$ のとき

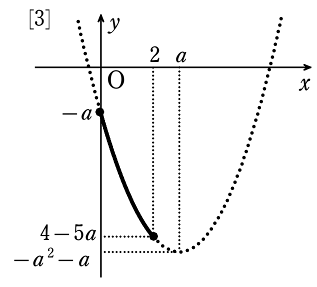
グラフは [図] の実線部分のようになる。

よって，$x=2$ で最小値 $4-5a$ をとる。

条件から　$4-5a=-2$

よって　$a=\dfrac{6}{5}$

これは $2<a$ を満たさない。



以上から　$a=1$