数学Ⅰ　2次方程式・2次不等式　単元テスト　No,1　（　　）組（　　）番　名前（　　　　　　　　）

1 以下の問に答えよ。

(1) $y=-(x+1)^2+4$ のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(2) 2次方程式 $3x^2-8x+m=0$ が重解をもつように，定数 m の値を定めよ。また，そのときの重解を求めよ。

(3) 放物線 $y=x^2-x+4$ と直線 $y=2x+2$ の共有点の個数とその座標を求めよ。

(4) 2次不等式　①　$-6x \geqq x^2+9$　　②　$2x-x^2-2<0$ を解け。

(5) 連立不等式　①　$5<x^2+4x \leqq 21$　　②　$\begin{cases} x^2+x-2<0 \\ x^2+x-1 \geqq 0 \end{cases}$ を解け。

(6) 2次不等式 $ax^2+x+b>0$ の解が $x<-3$，$2<x$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

(7) 放物線 $y=x^2+2(m-1)x+3-m^2$ が x 軸の正の部分と負の部分のそれぞれと交わるように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　(1)　$(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$　　(2)　$m=\dfrac{16}{3}$，$x=\dfrac{4}{3}$　　(3)　共有点の個数2個，

座標 $(1,\ 4)$，$(2,\ 6)$　　(4)　①　$x=-3$　　②　すべての実数

(5)　①　$-7 \leqq x<-5$，$1<x \leqq 3$　　②　$-2<x \leqq \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqq x<1$

(6)　$a=1$，$b=-6$　　(7)　$m<-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<m$

解説

(1)　共有点の x 座標は，2次方程式 $-(x+1)^2+4=0$ すなわち $x^2+2x-3=0$ の解である。

これを解くと　$(x+3)(x-1)=0$　　ゆえに　$x=-3,\ 1$

よって，求める座標は　$(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$

(2)　この方程式が重解をもつための必要十分条件は，判別式を D とすると

$$D=(-8)^2-4\cdot 3\cdot m=0$$

すなわち　$64-12m=0$　　ゆえに　$m=\dfrac{16}{3}$

このとき，方程式は　$3x^2-8x+\dfrac{16}{3}=0$　　すなわち　$9x^2-24x+16=0$

左辺を変形して　$(3x-4)^2=0$　　よって，重解は　$x=\dfrac{4}{3}$

(3)　$\begin{cases} y=x^2-x+4 & \cdots\cdots ① \\ y=2x+2 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

①，② から y を消去すると　$x^2-x+4=2x+2$

よって　$x^2-3x+2=0$　……③

③ の判別式を D とすると　$D=(-3)^2-4\cdot 1\cdot 2=1>0$

したがって，① と ② の共有点は2個。

③ を解くと　$(x-1)(x-2)=0$　　ゆえに　$x=1,\ 2$

② から　$x=1$ のとき $y=4$，$x=2$ のとき $y=6$

よって，共有点の座標は　$(1,\ 4)$，$(2,\ 6)$

(4)　①　整理すると　$x^2+6x+9 \leqq 0$

ゆえに　$(x+3)^2 \leqq 0$　　よって，解は　$x=-3$

②　両辺に -1 を掛けて整理すると　$x^2-2x+2>0$

$x^2-2x+2>0$ について　$D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 2=-4<0$

かつ，x^2 の係数は正である。よって，与えられた不等式の解は　すべての実数

(5)　(1)　$5<x^2+4x \leqq 21$ から　$\begin{cases} 5<x^2+4x & \cdots\cdots ① \\ x^2+4x \leqq 21 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$x^2+4x-5>0$　　よって　$(x+5)(x-1)>0$

ゆえに　$x<-5$，$1<x$　……③

② から　$x^2+4x-21 \leqq 0$　　よって　$(x+7)(x-3) \leqq 0$

ゆえに　$-7 \leqq x \leqq 3$　……④

③ と ④ の共通範囲を求めて

$-7 \leqq x<-5$，$1<x \leqq 3$

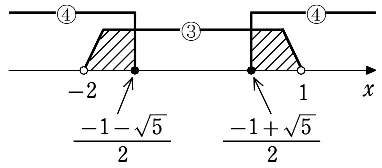
②　$\begin{cases} x^2+x-2<0 & \cdots\cdots ① \\ x^2+x-1 \geqq 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$

① から　$(x+2)(x-1)<0$　　よって　$-2<x<1$　……③

$x^2+x-1=0$ を解くと　$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

よって，② の解は

$x \leqq \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqq x$　……④



③ と ④ の共通範囲を求めて

$-2<x \leqq \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqq x<1$

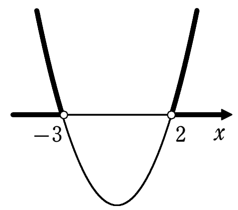
(6)　条件から，$y=ax^2+x+b$ のグラフは $x<-3$，$2<x$ の範囲で x 軸より上側にある。

すなわち，下に凸である放物線で，2点 $(-3,\ 0)$，$(2,\ 0)$ を通るから

$a>0$　……①

$9a-3+b=0$　……②

$4a+2+b=0$　……③

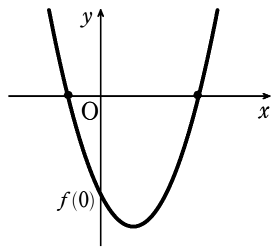


②，③ を連立させて解くと　$a=1$，$b=-6$

これは ① を満たす。

(7)　$f(x)=x^2+2(m-1)x+3-m^2$ とおく。

放物線 $y=f(x)$ は下に凸であるから，x 軸の正の部分と負の部分で交わるのは，放物線が y 軸の負の部分と交わるときである。



したがって　$f(0)<0$　すなわち　$3-m^2<0$

よって　$m^2-3>0$

ゆえに　$(m+\sqrt{3})(m-\sqrt{3})>0$

したがって　$m<-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<m$

2 2つの2次方程式 $x^2+2x+m=0$，$x^2+3x+2m=0$ が共通な解をもつように，定数 m の値を定めよ。また，その共通な解を求めよ。

解答　$m=0$，共通な解 0　または　$m=1$，共通な解 -1

解説

共通な解を α とすると　$\alpha^2+2\alpha+m=0$　……①，$\alpha^2+3\alpha+2m=0$　……②

① より　$m=-\alpha^2-2\alpha$　……③

これを ② に代入して　$\alpha^2+3\alpha+2(-\alpha^2-2\alpha)=0$

よって　$\alpha^2+\alpha=0$　　これを解いて　$\alpha=0,\ -1$

ゆえに，③ より　$\alpha=0$ のとき　$m=0$

$\alpha=-1$ のとき　$m=1$

よって　$m=0$，共通な解 0　または　$m=1$，共通な解 -1

注意　α^2 を消去すると以下のようになる。

②−① より　$\alpha+m=0$　　よって　$m=-\alpha$

これを ① に代入して　$\alpha^2+2\alpha-\alpha=0$　　よって　$\alpha^2+\alpha=0$

以下同様。

3 2つの2次方程式 $x^2+mx+m=0$ ……①，$x^2-2mx+m+6=0$ ……② がある。

次の条件を満たすように，定数 m の値の範囲を定めよ。

(1)　①，② がともに異なる2つの実数解をもつ。

(2)　①，② の少なくとも一方が実数解をもつ。

(3)　①，② のうち一方だけが，異なる2つの実数解をもつ。

解答　(1)　$m<-2$，$4<m$　　(2)　$m \leqq 0$，$3 \leqq m$　　(3)　$-2 \leqq m<0$，$3<m \leqq 4$

解説

2次方程式 ①，② の判別式を，それぞれ D_1，D_2 とすると

$D_1=m^2-4\cdot 1\cdot m=m(m-4)$

$D_2=(-2m)^2-4\cdot 1\cdot(m+6)=4(m+2)(m-3)$

(1)　①，② がともに異なる2つの実数解をもつための必要十分条件は

$D_1>0$　かつ　$D_2>0$

$D_1>0$ から　$m(m-4)>0$

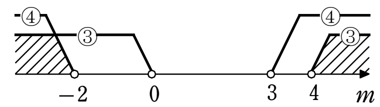
よって　$m<0$，$4<m$　……③

$D_2>0$ から　$4(m+2)(m-3)>0$

よって　$m<-2$，$3<m$　……④

③，④ の共通範囲を求めて

$m<-2$，$4<m$



(2)　①，② の少なくとも一方が実数解をもつための必要十分条件は

$D_1 \geqq 0$　または　$D_2 \geqq 0$

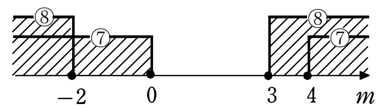
$D_1 \geqq 0$ から　$m(m-4) \geqq 0$

よって　$m \leqq 0$，$4 \leqq m$　……⑦

$D_2 \geqq 0$ から　$4(m+2)(m-3) \geqq 0$

よって　$m \leqq -2$，$3 \leqq m$　……⑧

⑦，⑧ の範囲を合わせて　$m \leqq 0$，$3 \leqq m$



(3)　①，② のうち一方だけが，異なる2つの実数解をもつのは，$D_1>0$ か $D_2>0$ の一方だけが成り立つときである。よって，③ か ④ の一方だけが成り立つ範囲を求めて

$-2 \leqq m<0$，$3<m \leqq 4$

4 2次方程式 $x^2+2mx+2m+3=0$ が -4 より大きい異なる2つの実数解をもつように，定数 m の値の範囲を定めよ。

解答　$m<-1$，$3<m<\frac{19}{6}$

解説

$f(x)=x^2+2mx+2m+3$ とおく。

これを変形すると　$f(x)=(x+m)^2-m^2+2m+3$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-m$ である。

また，2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$D=(2m)^2-4(2m+3)=4(m^2-2m-3)=4(m+1)(m-3)$

$y=f(x)$ のグラフと x 軸の $x>-4$ の部分が異なる2点で交わることと同じである。したがって，次の3つが同時に成り立てばよい。

$D=4(m+1)(m-3)>0$　……①

軸について　$-m>-4$　……②

$f(-4)=-6m+19>0$　……③

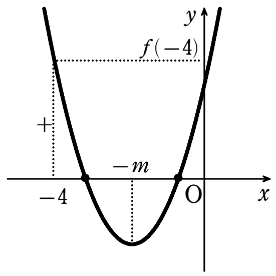
①から　$m<-1$，$3<m$　……④

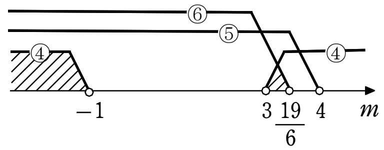
②から　$m<4$　……⑤

③から　$m<\frac{19}{6}$　……⑥

④，⑤，⑥の共通範囲を求めて

$m<-1$，$3<m<\frac{19}{6}$





5 2次方程式 $2ax^2-(a+2)x-5=0$ の1つの解が -1 と 0 の間にあり，他の解が 2 と 3 の間にあるような定数 a の値の範囲を求めよ。ただし，$a>0$ とする。

解答　$1<a<\frac{3}{2}$

解説

$f(x)=2ax^2-(a+2)x-5$ とおく。

$a>0$ であるから，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，$f(0)=-5<0$ である。

よって，与えられた2次方程式の1つの解が -1 と 0 の間にあり，他の解が 2 と 3 の間にあるのは

$f(-1)>0$　かつ　$f(2)<0$　かつ　$f(3)>0$

のときである。

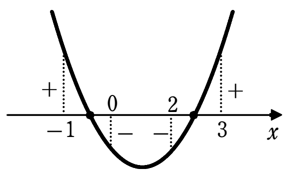
$f(-1)>0$ から　$3a-3>0$　　ゆえに　$a>1$　……①

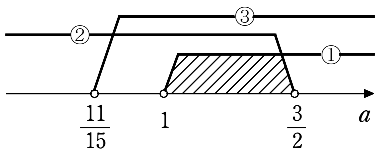
$f(2)<0$ から　$6a-9<0$　　ゆえに　$a<\frac{3}{2}$　……②

$f(3)>0$ から　$15a-11>0$　　ゆえに　$a>\frac{11}{15}$　……③

①，②，③の共通範囲を求めて

$1<a<\frac{3}{2}$





6 2次方程式 $x^2+kx+2k-1=0$ の2つの解がともに -2 と 5 の間にあるように，定数 k の値の範囲を定めよ。

解答　$-\frac{24}{7}<k\leqq 4-2\sqrt{3}$

解説

$f(x)=x^2+kx+2k-1$ とおく。

$f(x)=x^2+2\cdot\frac{k}{2}x+\left(\frac{k}{2}\right)^2-\left(\frac{k}{2}\right)^2+2k-1$

$=\left(x+\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+2k-1$

よって　軸 $x=-\frac{k}{2}$，頂点 $\left(-\frac{k}{2},\ -\frac{k^2}{4}+2k-1\right)$

また　$D=k^2-4\cdot 1\cdot(2k-1)=k^2-8k+4$

$=\{k-(4+2\sqrt{3})\}\{k-(4-2\sqrt{3})\}$

題意を満たすための条件は，

$f(-2)>0$，$f(5)>0$，$-2<-\frac{k}{2}<5$，$D\geqq 0$

$f(-2)=3>0$，

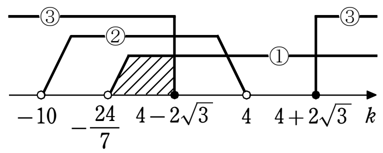
$f(5)=5^2+5k+2k-1=7k+24>0$ から

$k>-\frac{24}{7}$　……①

$-2<-\frac{k}{2}<5$ から　$-10<k<4$　……②

$D\geqq 0$ から　$k\leqq 4-2\sqrt{3}$，$4+2\sqrt{3}\leqq k$　……③

①，②，③の共通部分は　$-\frac{24}{7}<k\leqq 4-2\sqrt{3}$



7 方程式 $|x^2+2x|=k$ の実数解の個数は，定数 k の値によってどのように変わるか。

解答　$k<0$ のとき0個，$k=0$ のとき2個，$0<k<1$ のとき4個，
$k=1$ のとき3個，$k>1$ のとき2個

解説

この方程式の実数解の個数は，関数 $y=|x^2+2x|$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数に一致する。

よって，[図]から

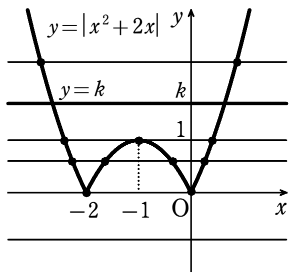
$k<0$ のとき0個，

$k=0$ のとき2個，

$0<k<1$ のとき4個，

$k=1$ のとき3個，

$k>1$ のとき2個



8 不等式 $x^2+2mx+1\geqq 0$ が，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲内において，常に成り立つように，定数 m の値の範囲を，それぞれ定めよ。

解答　$m\geqq -1$

解説

$f(x)=x^2+2mx+1$ とすると　$f(x)=(x+m)^2+1-m^2$

よって，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=-m$ である。

[1]　$-m\leqq 0$ すなわち $m\geqq 0$ のとき

$0\leqq x\leqq 2$ で常に $f(x)\geqq 0$ であるためには　$f(0)\geqq 0$

$f(0)=1$ であるから，これは常に成り立つ。

したがって　$m\geqq 0$　……①

[2]　$0<-m<2$ すなわち $-2<m<0$ のとき

$0\leqq x\leqq 2$ で常に $f(x)\geqq 0$ であるためには　$f(-m)\geqq 0$

すなわち　$1-m^2\geqq 0$　　よって　$(m+1)(m-1)\leqq 0$

ゆえに　$-1\leqq m\leqq 1$

これと $-2<m<0$ の共通範囲は　$-1\leqq m<0$　……②

[3]　$2\leqq -m$ すなわち $m\leqq -2$ のとき

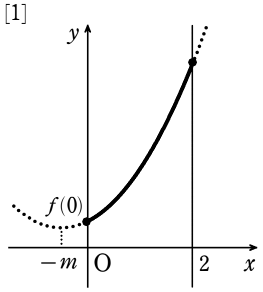
$0\leqq x\leqq 2$ で常に $f(x)\geqq 0$ であるためには　$f(2)\geqq 0$

すなわち　$4+4m+1\geqq 0$　　ゆえに　$m\geqq -\frac{5}{4}$

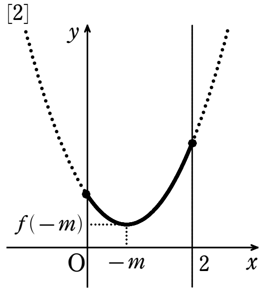
これは $m\leqq -2$ を満たさない。

①と②の範囲を合わせて　$m\geqq -1$

[1]



[2]



[3]