1 次の式を計算せよ。

(1) 0.5^{-3}　　(2) $(-2^{-1})^{-3}\div2^{-3}\times2^4$　　(3) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}$

(4) $\left\{\left(\dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}$　　(5) $\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}$　　(6) $\left(5^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)\left(5^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right)$

(7) $\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{-3}$

(1)		(2)		(3)		(4)	
(5)		(6)		(7)			

解答　(1) 8　(2) -1024　(3) 2　(4) $\dfrac{5}{4}$　(5) $3\sqrt{2}$　(6) 8
(7) 0

解説

(1) $0.5^{-3}=\dfrac{1}{0.5^3}=\dfrac{1}{0.125}=8$

(2) $(-2^{-1})^{-3}\div2^{-3}\times2^4=-2^3\div2^{-3}\times2^4$
$=-2^{3-(-3)+4}=-2^{10}=-1024$

(3) $\sqrt[5]{\sqrt{1024}}=\sqrt[10]{2^{10}}=2$

(4) $\left\{\left(\dfrac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{4}}\right\}^{\frac{2}{3}}=\left\{\left(\dfrac{4}{5}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}=\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-1}=\dfrac{5}{4}$

(5) $\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\div\sqrt[4]{6}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{54}\times\dfrac{1}{\sqrt[4]{6}}=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{\dfrac{54}{6}}$
$=\sqrt{6}\times\sqrt[4]{9}=\sqrt{6}\times\sqrt{3}=3\sqrt{2}$

(6) $\left(5^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right)\left(5^{\frac{2}{3}}-5^{\frac{1}{3}}3^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{2}{3}}\right)=\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^3=5+3=8$

(7) $\sqrt[3]{-24}+\sqrt[3]{81}+\sqrt[3]{-3}=-\sqrt[3]{24}+\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{3}$
$=-\sqrt[3]{2^3\cdot3}+\sqrt[3]{3^3\cdot3}-\sqrt[3]{3}$
$=-2\sqrt[3]{3}+3\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3}=0$

参考　n が奇数のとき　$\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$

2 $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}=3$ のとき，$x+x^{-1}$の値を求めよ。

解答　$x+x^{-1}=18$

解説

$x+x^{-1}=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(x^{-\frac{1}{3}}\right)^3$
$=\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3x^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)$
$=\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)^3-3\left(x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}\right)$
$=3^3-3\cdot3=18$

3 $a>0$，$a^{2x}=5$ のとき，$(a^{4x}-a^{-4x})\div(a^x-a^{-x})$ の値を求めよ。

解答　$\dfrac{156\sqrt{5}}{25}$

解説

$a^{4x}-a^{-4x}=(a^{2x})^2-(a^{-2x})^2$
$=(a^{2x}+a^{-2x})(a^{2x}-a^{-2x})$
$=(a^{2x}+a^{-2x})\{(a^x)^2-(a^{-x})^2\}$
$=(a^{2x}+a^{-2x})(a^x+a^{-x})(a^x-a^{-x})$

よって

$(a^{4x}-a^{-4x})\div(a^x-a^{-x})=(a^{2x}+a^{-2x})(a^x+a^{-x})$
$=\left(a^{2x}+\dfrac{1}{a^{2x}}\right)\left(a^x+\dfrac{1}{a^x}\right)$

ここで $a>0$，$a^{2x}=5$ から　$a^x=\sqrt{5}$

ゆえに

与式$=\left(5+\dfrac{1}{5}\right)\left(\sqrt{5}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)=\dfrac{156\sqrt{5}}{25}$

4 次の数の大小を不等号を用いて表せ。

(1) $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{3}$，$\sqrt[6]{7}$　　(2) 1，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$，$\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$

解答　(1) $\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$　　(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^4<\left(\dfrac{1}{3}\right)^2<1<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$

解説

(1) 3 つの数を，それぞれ 6 乗すると

$(\sqrt{2})^6=\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8$，$(\sqrt[3]{3})^6=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$，$(\sqrt[6]{7})^6=7$

$7<8<9$ であるから　$(\sqrt[6]{7})^6<(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$　ゆえに　$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

別解　$\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}=2^{3\cdot\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{6}}$，$\sqrt[3]{3}=3^{\frac{1}{3}}=3^{2\cdot\frac{1}{6}}=9^{\frac{1}{6}}$，$\sqrt[6]{7}=7^{\frac{1}{6}}$

$7<8<9$ であるから　$7^{\frac{1}{6}}<8^{\frac{1}{6}}<9^{\frac{1}{6}}$　すなわち　$\sqrt[6]{7}<\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$

(2) 底 $\dfrac{1}{3}$ は 1 より小さく，$-3<0<2<4$ であるから

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^4<\left(\dfrac{1}{3}\right)^2<\left(\dfrac{1}{3}\right)^0<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$　すなわち　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^4<\left(\dfrac{1}{3}\right)^2<1<\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$

5 次の連立方程式を解け。

$$\begin{cases}2^{x-1}+3^{y+1}=31\\2^{x+2}-3^{y-1}=29\end{cases}$$

解答　(2) $x=3$，$y=2$

解説

$2^{x-1}=X$，$3^{y-1}=Y$ とおくと　$X>0$，$Y>0$

また，連立方程式は　$\begin{cases}X+9Y=31 & \cdots\cdots①\\8X-Y=29 & \cdots\cdots②\end{cases}$

①，② を解くと　$X=4$，$Y=3$

これは $X>0$，$Y>0$ を満たす。

$X=4$ から　$2^{x-1}=4$　これを解いて　$x=3$

$Y=3$ から　$3^{y-1}=3$　これを解いて　$y=2$

よって　$x=3$，$y=2$

6 次の方程式，不等式を解け。

(2) $27^x=\dfrac{1}{9}$　　(7) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x<\dfrac{1}{64}$　　(3) $3^{x-2}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$　　(5) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\dfrac{1}{8}\right)^x$

(3) $9^{x+1}-28\cdot3^x+3=0$　　(6) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-1}-9\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+2>0$

1		2		3	
4		5		6	

解答　(2) $x=-\dfrac{2}{3}$　(7) $x>3$　(3) $x=\dfrac{1}{2}$　(5) $x<-2$　(3) $x=1$，-2
(6) $x<-1$，$2<x$

解説

(2) $27^x=\dfrac{1}{9}$ から　$3^{3x}=3^{-2}$

よって　$3x=-2$　ゆえに　$x=-\dfrac{2}{3}$

(7) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^x<\dfrac{1}{64}$ から　$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x<\left(\dfrac{1}{4}\right)^3$　底 $\dfrac{1}{4}$ は 1 より小さいから　$x>3$

(3) $3^{x-2}=\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$ から　$3^{x-2}=3^{-\frac{3}{2}}$

よって　$x-2=-\dfrac{3}{2}$　これを解いて　$x=\dfrac{1}{2}$

(5) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\dfrac{1}{8}\right)^x$ から　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{5x+4}>\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x}$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$5x+4<3x$　これを解いて　$x<-2$

(6) 不等式を変形すると

$4\cdot\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\right\}^2-9\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+2>0$

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x=t$ とおくと，$t>0$ であり，不等式は

$4t^2-9t+2>0$　よって　$(t-2)(4t-1)>0$

これを解くと　$t<\dfrac{1}{4}$，$2<t$

$t>0$ であるから　$0<t<\dfrac{1}{4}$，$2<t$

ゆえに　$0<\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<\dfrac{1}{4}$，$2<\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

すなわち　$0<\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

底 $\dfrac{1}{2}$ は 1 より小さいから　$x<-1$，$2<x$

7 関数$y=-4^x+2^x+2$ $(-1\leqq x\leqq 2)$の最大値，最小値を求めよ。
また，そのときの x の値を求めよ。

解答　$x=-1$ で最大値 $\frac{9}{4}$，$x=2$ で最小値 -10

解説

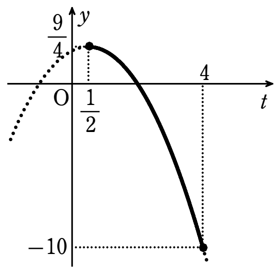
$y=-(2^x)^2+2^x+2$ $(-1\leqq x\leqq 2)$

$2^x=t$ とおく。

$-1\leqq x\leqq 2$ から　$2^{-1}\leqq 2^x\leqq 2^2$

よって　$\frac{1}{2}\leqq t\leqq 4$ ……①

また　$y=-t^2+t+2=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$



① の範囲で y は

$t=\frac{1}{2}$ で最大値 $\frac{9}{4}$，$t=4$ で最小値 -10

をとる。

$t=\frac{1}{2}$ のとき　$2^x=\frac{1}{2}$　ゆえに　$x=-1$

$t=4$ のとき　$2^x=4$　ゆえに　$x=2$

よって，y は

$x=-1$ で最大値 $\frac{9}{4}$，$x=2$ で最小値 -10

をとる。

8 関数 $y=4(2^x+2^{-x})-(4^x+4^{-x})$ の最大値と，最大値を与える x の値を求めよ。

解答　$x=0$ で最大値 6

解説

$2^x+2^{-x}=t$ とおく。

$2^x>0$，$2^{-x}>0$ から，相加平均と相乗平均の大小関係により

$t\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}$　すなわち　$t\geqq 2$ ……①

ここで　$4^x+4^{-x}=(2^x+2^{-x})^2-2=t^2-2$

よって　$y=4t-(t^2-2)=-(t-2)^2+6$

① の範囲において，y は $t=2$ で最大値 6 をとる。

$t=2$ のとき　$2^x=2^{-x}$　ゆえに　$(2^x)^2=1$　よって　$x=0$

したがって，y は $x=0$ で最大値 6 をとる。